

РГР, ККЗ №2

логич №5

Дискрекциональные и непрерывные функции одной переменной.

N=13

Задг 1:

$$y = x \cdot e^{-x}$$

$$y' = x' \cdot e^x + x(e^x)' = e^x + x e^x = e^x(x+1)$$

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_x = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}$$

$$y'_t = 3(1 - \cos t)' = 3(1 + \sin t)$$

$$y''_t = 3(1 + \sin t)' = 3(1 + \cos t)$$

$$x'_t = 3(1 - \sin t)' = 3(1 - \cos t)$$

$$x''_t = 3(1 - \cos t)' = 3(1 + \sin t)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3(1 + \cos t) \cdot 3(1 - \cos t) - 3(1 + \sin t) \cdot 3(1 + \sin t)}{(3(1 - \cos t))^3}$$

$$= \frac{3^2((1 + \cos t)(1 - \cos t) - (1 + \sin t)^2)}{3^3(1 - \cos t)^3} =$$

$$= \frac{1 - \cos^2 t - (1 + \sin t)^2}{3(1 - \cos t)^3}$$

Beispiel 2:

$$\varphi(x) = \sin x; \text{ b.T. } x = 31^\circ$$

$$\varphi(30^\circ + 1^\circ) \approx \varphi(30^\circ) + \varphi'(30^\circ) \cdot 1^\circ$$

$$\varphi(30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\varphi'(x) = \sin' x = \cos x$$

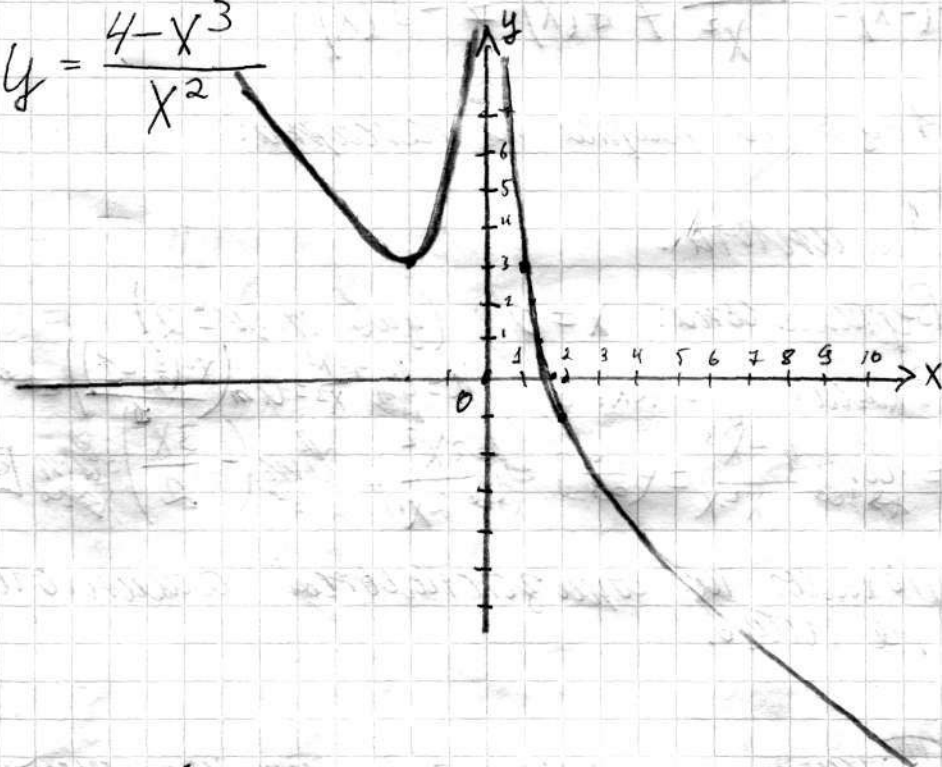
$$\varphi'(30^\circ) \approx 0,866025 \approx \cos 30^\circ$$

Ригнобиго:

$$\sin 31^\circ = 0,514722$$

Зависит

$$y = \frac{4 - x^3}{x^2}$$



1) Обл. взят: $x: x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

2) Точка разрыва: $x_0 = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{4 - x^3}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{4 - x^3}{x^2} = \infty \Leftrightarrow$$

разрыв ^{несобственный} второго рода
Линия симметрии: $x = 1$

III Функция е непрекъсната на промежутъци
 $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

IV Доказателна карта, симетрия:

$$f(-x) = \frac{4-x^3}{x^2} \neq f(x) \neq -f(x)$$

φ -гиз ни карта ни симетрия:

V Асимптоти:

Вертикална: $x=0$; (губ $n \cdot v = 2$)

Плочна: $y = kx + b$; $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3(\frac{4}{x^3} - 1)}{x^2} \right) = \infty$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4-x^3}{x^2-x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^2}{2x-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{3x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\pm\infty]$$

Плочни та хоризонтални асимптоти не има.

VI Понякога решават с всички корени:

$$y=0: \frac{4-x^3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4-x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$$

$x=0$ - асимптота.

VII Критические точки первого порядка:

$$f'(x) = \left(\frac{4-x^3}{x^2} \right)' = \frac{(4-x^3)' \cdot x^2 - (4-x^3) \cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-3x^2 \cdot x^2 - (8x - 2x^4)}{x^4} = \frac{-3x^4 - 8x + 2x^4}{x^4} = \frac{-x^4 - 8x}{x^4} =$$

$$= -\frac{x^3 + 8}{x^3} \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

| x | $(-\infty; -2)$ | -2 | $(-2; 0)$ | 0 | $(0; \infty)$ |
|-------|-----------------|----|-----------|---|---------------|
| f(x) | - | 0 | + | - | - |
| f'(x) | ↘ | 3 | ↗ | - | ↘ |

Точка максимума $x_{\max} = 0$

Точка минимума $x_{\min} = -2$

VIII Критические точки второго порядка:

$$f''(x) = \left(-\frac{x^3 + 8}{x^3} \right)' \Leftrightarrow \frac{(-x^3 - 8)' \cdot x^3 - (-x^3 - 8) \cdot (x^3)'}{x^6} =$$

$$= \frac{-3x^2 \cdot x^3 - (-x^3 - 8) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-3x^5 + 3x^5 + 24x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{24x^2}{x^6} = \frac{24}{x^4}$$

Полок вторых не меняет

Завдання РГР, ККЗ №2 (Модуль №5 "Диференціальне числення функцій одинєї змінної")

Завдання 1. (35 балів) Знайти $\frac{dy}{dx}$ функції а) та $\frac{d^2y}{dx^2}$ функції б)

| № варіантів | Приклади | № варіантів | Приклади |
|-------------|---|-------------|--|
| 1. | а) $y = \frac{x-1}{x+1} e^{-x}$; б) $\begin{cases} x = t + \ln \cos t \\ y = t - \ln \sin t \end{cases}$ | 2. | а) $y = \ln \ln x$; б) $\begin{cases} x = 2 \cos^2 2t \\ y = \sin^2 2t \end{cases}$ |
| 3. | а) $y = \arcsin x^{-2}$; б) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$ | 4. | а) $y = xe^{-x}$; б) $\begin{cases} x = \frac{1}{1+t^2} \\ y = \frac{1+t^2}{1+t^2} \end{cases}$ |
| 5. | а) $y = x^2 \ln x$; б) $\begin{cases} x = \frac{\sin 2t}{2} \\ y = \cos^2 t \end{cases}$ | 6. | а) $y = xe^{\frac{1}{x}}$; б) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t \\ y = \frac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$ |
| 7. | а) $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; б) $\begin{cases} x = t^3 + 2t \\ y = t^3 + 8t - 1 \end{cases}$ | 8. | а) $y = \cos^2 x$; б) $\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = t^3 + t + 1 \end{cases}$ |
| 9. | а) $y = \ln \operatorname{tg} 4x$; б) $\begin{cases} x = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} t^2 + 1 \\ y = \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{t} \end{cases}$ | 10. | а) $y = \sqrt{(1-x^2)^2}$; б) $\begin{cases} x = \arcsin 2t \\ y = \arccos 2t \end{cases}$ |
| 11. | а) $y = \sin^2 2x$; б) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 \end{cases}$ | 12. | а) $y = 3^{\cos x}$; б) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$ |
| 13. | а) $y = xe^{-x}$; б) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ | 14. | а) $y = \ln \sqrt{1+x^2}$; б) $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \arcsin t \end{cases}$ |
| 15. | а) $y = 2x^{\sqrt{x}}$; б) $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases}$ | 16. | а) $y = \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$; б) $\begin{cases} x = 8(1 - \cos t) \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases}$ |
| 17. | а) $y = \ln(\arcsin 3x)$; б) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ | 18. | а) $y = \arcsin(\ln x)$; б) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \ln t \end{cases}$ |
| 19. | а) $y = \sqrt{e^{2x} - 6}$; б) $\begin{cases} x = 2t + 3t^2 \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$ | 20. | а) $y = e^{\sin^2 x}$; б) $\begin{cases} x = \arccos^2 t \\ y = b \sin^2 t \end{cases}$ |
| 21. | а) $y = \lg^2 5x$; б) $\begin{cases} x = \arccos^2 t \\ y = \arcsin^2 t \end{cases}$ | 22. | а) $y = \frac{1}{2} \sin(x^2)$; б) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases}$ |
| 23. | а) $y = \arcsin \lg x$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$ | 24. | а) $y = \sqrt{\sin(x^2)}$; б) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^2 \end{cases}$ |
| 25. | а) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$; б) $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$ | 26. | а) $y = x^{\sqrt{x}}$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \frac{1-t}{\sqrt{t^2 + 1}} \end{cases}$ |
| 27. | а) $y = (\arcsin x)^x$; б) $\begin{cases} x = \sin 3t \\ y = \cos 3t \end{cases}$ | 28. | а) $y = x^2 \cdot 10^{2x}$; б) $\begin{cases} x = 3e^t \cos 2t \\ y = 3e^t \sin 2t \end{cases}$ |

Завдання 3. (45 балів) Провести повне дослідження функції f(x) і побудувати

| № варіантів | f(x) | a | f(x) | № варіантів | f(x) | a | f(x) |
|-------------|---------------|------|--|-------------|---------------|------|--|
| 1. | $\sin x$ | 29° | $\frac{x^3 + 4}{x^2}$ | 2. | $\cos x$ | 62° | $(2x + 3)e^{-x}$ |
| 3. | $\ln x$ | 0,9 | $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ | 4. | $\arcsin x$ | 0,95 | $\frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$ |
| 5. | \sqrt{x} | 24 | $\frac{2}{x^2 + 2x}$ | 6. | $\sqrt[3]{x}$ | 28 | $\ln \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)$ |
| 7. | $\cos x$ | 31° | $\frac{4x^2}{3 + x^2}$ | 8. | $\ln x$ | 1,01 | $(3 - 0)e^x$ |
| 9. | $\arcsin x$ | 1,1 | $\frac{12x}{9 + x^2}$ | 10. | $\sin x$ | 46° | $\frac{e^{-2x}}{2 - 1}$ |
| 11. | $\sqrt[3]{x}$ | 7 | $\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ | 12. | \sqrt{x} | 37 | $\ln \left(\frac{1}{1 + 2} \right)$ |
| 13. | $\sin x$ | 31° | $\frac{4 - x^3}{x^2}$ | 14. | $\cos x$ | 44° | $(-2)e^x$ |
| 15. | $\ln x$ | 0,95 | $\frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$ | 16. | $\arcsin x$ | 1,01 | $3 - 3 \ln \left(\frac{1}{x} \right)$ |
| 17. | \sqrt{x} | 26 | $\frac{(x-1)^2}{x^2}$ | 18. | $\sqrt[3]{x}$ | 26 | $-(2x+1)e^x$ |
| 19. | $\cos x$ | 62° | $\frac{e^{2(x+2)}}{2x+2}$ | 20. | $\ln x$ | 1,1 | $\frac{x^2}{(x-1)}$ |
| 21. | $\arcsin x$ | 0,9 | $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$ | 22. | $\sin x$ | 59° | $\ln \left(\frac{x}{x+2} \right)$ |
| 23. | $\sqrt[3]{x}$ | 9 | $\frac{2x^3 + 1}{x^2}$ | 24. | \sqrt{x} | 82 | $\frac{12 - 3x}{x^2 + 1}$ |
| 25. | $\sin x$ | 64° | $x + \frac{1}{x}$ | 26. | $\arcsin x$ | 1,2 | $\frac{e^{3-x}}{3-x}$ |
| 27. | \sqrt{x} | 35 | $2 \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) - 1$ | 28. | $\sqrt[3]{x}$ | 65 | $\frac{-8x}{x^2 - 1}$ |

Завдання 2. (20 балів) Обчислити наближене значення функції f(x) в точці a.